**Sannolikhet**

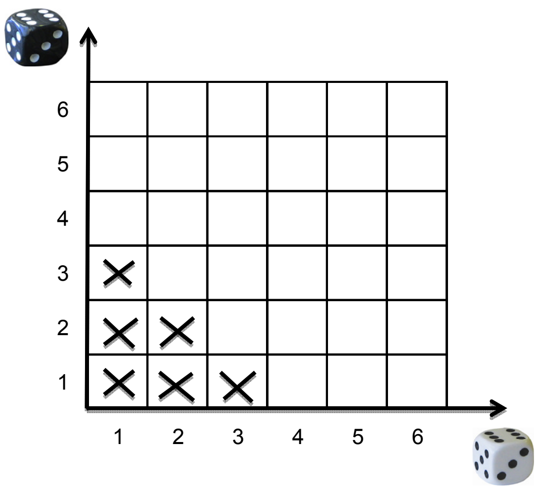
Hur räknar vi ut en sannolikhet? Vi klarar oss långt med den *klassiska definitionen* på sannolikhet. När vi utför ett slumpförsök betecknar vi sannolikheten för en händelse A med P(A). Då är

$$P(A) = \frac{\text{Antalet lyckade resultat för A}}{\text{Totala antalet möjliga resultat}}$$

Den här formeln stöder ett antal välkända egenskaper för sannolikhetsbegreppet. Här måste vi åtminstone nämna att en sannolikhet alltid ligger mellan 0 och 1 (0 % och 100 %). Matematiskt skulle vi skriva att $0 \le P(A) \le 1$. Med andra ord är sannolikheten för en omöjlig händelse 0 och sannolikheten för en helt säker händelse 1.

*Ex*1 Slumpförsök: kast med en svart och en vit tärning samtidigt. Händelse: summan av ögontalen är mindre än fem. Hur stor är sannolikheten för denna händelse?

*Lösning*: Vi kan räkna upp alla lyckade resultat för händelsen. Men vi kan också använda tärningsblocket som i spelet och märka ut dem. Det totala antalet möjliga resultat är 36 och antalet lyckade resultat för händelsen är 6.




Sannolikheten P(ögonsumman är mindre än fem) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 = 17\%$.

*Ex*2 Vid stationen Primtalstest kastar du två specialtärningar samtidigt för att få fram ett tal i intervallet $2 \ldots 99$. Bestäm sannolikheten för att talet du får är ett primtal.

*Lösning*:
Ett primtal är ett heltal som endast är delbart med sig självt och med talet 1. Intervallet 2 … 99 består av 98 tal, och i intervallet finns 25 primtal (se primtalstabellen i spelreglernas bilaga 2). Då får vi

$$P(\text{primtal}) = \frac{25}{98} = 0{,}25510... \approx 0{,}26 = 26\%.$$

*Ex*3 Vid spelets triangelstation råkar vi ut för ett *triangelkrav*. Vi kastar tre vanliga tärningar samtidigt, och summan av de två minsta ögontalen måste vara större än det största ögontalet. Hur stor är sannolikheten för att triangelkravet uppfylls i en kastomgång?

*Lösning*: Vi måste märka tärningarna, t.ex. A, B och C. Det är lättast att tänka sig att alla tre tärningar har olika färg. Enkel *kombinatorik* ger att antalet möjliga resultat är $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Till exempel är följande två möjligheter inte samma resultat:

| | |
|---|---|
| A | 6 |
| B | 1 |
| C | 1 |

| | |
|---|---|
| A | 1 |
| B | 6 |
| C | 1 |

Genom att ställa upp alla möjliga resultat i en tabell i ett kalkylprogram ser vi att de lyckade resultaten är 111 till antalet (kontrollera gärna detta ☺). Då är

$$\text{P(triangelkravet uppfylls)} = \frac{111}{216} \approx 0{,}514\,.$$

Sannolikheten för att kravet uppfylls i ett försök är alltså lite större än 50 %.

*Ex*4 Vid triangelstationen kan vi också få en bonusvinst på 100 euro. Ena möjligheten är att alla tre tärningar har samma ögontal, vilket ger en liksidig triangel. Andra möjligheten är att tärningarnas ögontal är 3, 4 och 5. Vi får då en rätvinklig triangel[┘]. Hur stor är sannolikheten för bonusvinsten?

*Lösning*: Vi kan få sex olika liksidiga trianglar, och antalet sätt att få en rätvinklig triangel är också sex. Vi har alltså 12 olika lyckade resultat för bonusvinsten. Då är

$$\text{P(bonusvinst)} = \frac{12}{216} = \frac{1}{18} \approx 0{,}056 = 5{,}6\,\%\,.$$

---

När vi bestämmer vissa sannolikheter behöver vi en *multiplikationsregel*. Det är då enklare om händelserna A och B är oberoende av varandra. Detta är fallet till exempel när vi kastar två tärningar samtidigt. Vi använder formeln

$$\text{P(A och B)} = \text{P(A)} \cdot \text{P(B)}\,.$$

*Ex*5 Vi kastar en svart och en vit tärning samtidigt. Hur stor är sannolikheten att båda tärningarna ger en sexa?

*Lösning:* Här är $\text{P(sexa på vita tärningen)} = \frac{1}{6}$ och $\text{P(sexa på svarta tärningen)} = \frac{1}{6}$. Då är

$\text{P(sexa på båda tärningarna)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$. Detta motsvarar ett kryss i tärningsblocket.

Vi behöver nu en regel för *motsatta händelsen* till A: $\text{P(inte A)} = 1 - \text{P(A)}$, eller i procent:
$\text{P(inte A)}\,\% = 100\,\% - \text{P(A)}\,\%$. I sannolikhetsläran kallar vi detta för komplementhändelsen till A.

---

[┘] Pythagoras sats uppfylls eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$ eller $25 = 25$. Då är triangeln rätvinklig.

*Ex6* Vid ministationen Tärningskast i Clermont-Ferrand ska vi välja mellan två alternativ och kasta en tärning fyra gånger efter varandra (de Mérés första problem).

a) Vi bestämmer sannolikheten för strategin ”ingen sexa”:

*Lösning*: $\text{P(ingen sexa)} = \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}482$

b) Strategin ”åtminstone en sexa” är motsatta händelsen till ”ingen sexa”. Vi använder den nya regeln och får:

*Lösning*: $\text{P(åtminstone en sexa)} = 1 - \text{P(ingen sexa)} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}518$.

Den senare händelsen är alltså mer sannolik.

*Ex7* a) Vi beräknar sannolikheten för att triangelkravet inte alls uppfylls på de tre första kastomgångarna när vi har anlänt till Pythagorion.
b) Vi beräknar sannolikheten för att triangelkravet uppfylls först i fjärde kastomgången.

*Lösning:*

a) $\text{P(triangelkravet uppfylls inte)} = 1 - \frac{111}{216} = \frac{105}{216}$

$\text{P(triangelkravet uppfylls inte på tre kastomgångar)} = \frac{105}{216} \cdot \frac{105}{216} \cdot \frac{105}{216} = 0{,}11487... \approx 0{,}11$

b) $\text{P(kravet uppfylls i 4:e omgången)} = \left(\frac{105}{216}\right)^3 \cdot \frac{111}{216} = 0{,}05903... \approx 0{,}059$.

Om du vill kan du nu lätt räkna ut sannolikheten för att triangelkravet uppfylls i en viss kastomgång.

**Fördjupning**

Vi behöver ibland räkna ut sannolikheter för händelser som är beroende av varandra. Multiplikationsregeln får då följande form: $\text{P(A och B)} = P(A) \cdot P(B|A)$. Här utläser vi $P(B|A)$ ”sannolikheten för B då A har hänt”. Du kan läsa mer om beroende händelser i en gymnasiebok i sannolikhetslära. Vi kan räkna ut sannolikheterna för flera av strategierna vid stationen Trekortstull med hjälp av regeln.

*Ex8* Vi räknar ut sannolikheten för att strategin nr 8 ”Du får tre svarta kort eller tre röda kort” uppfylls i en kastomgång.

*Lösning*: Du får tre kort efter varandra av kortgivaren. Det är frågan om dragning utan återläggning. Det finns från början 26 svarta och 26 röda kort i kortleken. Vi får

$\text{P(tre svarta kort)} = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{12}{25} = \frac{6}{51}$

På samma sätt får vi P(tre röda kort) $=\frac{6}{51}$. Vi använder nu *additionsregeln* (för varandra uteslutande händelser):

P(tre svarta kort *eller* tre röda kort) $=\frac{6}{51}+\frac{6}{51}=\frac{12}{51}=0{,}23529...\approx 0{,}24$

Hur stor är denna sannolikhet jämfört med de övriga strategierna?

---

Antalet sätt att i det finska lottospelet välja 7 lottonummer av 39 betecknar vi med $\binom{39}{7}$, vilket utläses ”39 över 7”. Denna funktion finns på många miniräknare som symbolen $\boxed{\text{n C r}}$. Till exempel är

$$\binom{39}{7}=15\,380\,937\,.$$

Allmänt kan vi till exempel ur en grupp med $n$ personer välja ut $k$ personer på $\binom{n}{k}$ olika sätt.

*Ex*9 Vi räknar ut sannolikheten för att du vid trekortstullen får
- a) två röda kort och ett svart kort (strategi nr 1)
- b) exakt ett bildkort (strategi nr 4)

vid en kastomgång.

*Lösning*:

a) Vi kan dra två röda kort på $\binom{26}{2}=325$ olika sätt och ett svart kort på $\binom{26}{1}=26$ sätt. *Kombinatorikens multiplikationsprincip* ger att vi kan dra två röda och ett svart kort på totalt $26\cdot 325=8450$ sätt. Det totala antalet sätt att dra tre kort ur en kortlek är $\binom{52}{3}=22100$. Vi får P(två röda och ett svart kort) $=\frac{8450}{22100}=0{,}3823...\approx 0{,}38$

b) Det finns sammanlagt 12 bildkort (kung, dam, knekt) i en kortlek. De övriga korten är 40 till antalet. Vi vill dra ett bildkort och två övriga kort. Utgående från resonemanget ovan är sannolikheten

$$\text{P(exakt ett bildkort)}=\frac{\binom{12}{1}\binom{40}{2}}{\binom{52}{3}}=\frac{12\cdot 780}{22100}=0{,}4235...\approx 0{,}42\,.$$

För att klara av formeln för antalet kombinationer behöver vi använda $n!$ (”$n$ fakultet”). Vi har till exempel att $7!=7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$. Den här typen av beräkningar används mycket inom kombinatoriken. I utskriven form är antalet kombinationer

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Du kan läsa mer om kombinatorik i en gymnasiebok i sannolikhetslära ☺.