Todennäköisyys

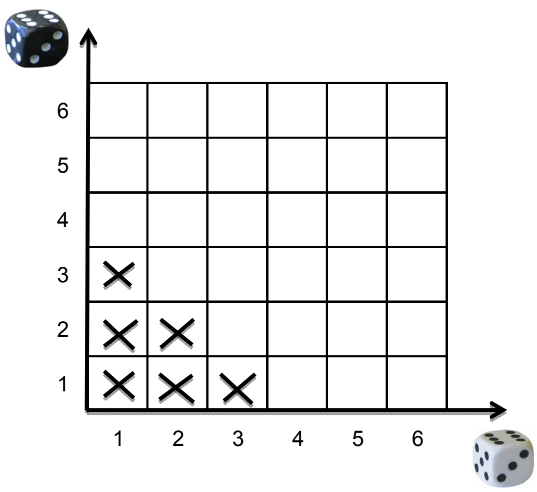
Kuinka laskemme todennäköisyyden? *Klassisella todennäköisyyden määritelmällä* pärjää pitkälle. Kun teemme satunnaiskokeen, tapauksen A todennäköisyys merkitään P(A). Silloin

$$P(A) = \frac{\text{Suotuisten tulosten määrä}}{\text{Kaikkien mahdollisten tulosten määrä}}$$

Tämä kaava tukee useita todennäköisyyskäsitteen ominaisuuksia. Tässä on ainakin mainittava, että todennäköisyys on 0 ja 1 välillä. (0 % ja 100 %). Matemaattisesti kirjoittaisimme, että $0 \le P(A) \le 1$. Toisin sanoen mahdottoman tapahtuman todennäköisyys on 0 ja varman tapahtuman 1.

Esim1 Satunnaiskoe: Heitetään yhtä aikaa mustaa ja valkoista noppaa. Tapahtuma: Silmälukujen summa on pienempi kuin viisi. Mikä on tämän tapahtuman todennäköisyys?

Ratkaisu: Voimme luetella kaikki tapahtuman suotuisat tulokset. Mutta voimme myös käyttää pelin noppalehtiötä ja merkitä ne. Mahdollisia tuloksia on 36 ja suotuisia tapauksia on 6.



Todennäköisyys P(silmälukujen summa on pienempi kuin 5) $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 = 17\%$.

Esim2 Alkulukutesti–asemalla heität yhtä aikaa kahta erikoisnoppaa saadaksesi luvun väliltä 2…99. Millä todennäköisyydellä saamasi luku on alkuluku?

Ratkaisu:
Alkuluku on luku, joka on jaollinen vain itsellään ja ykkösellä. Välillä 2…99 on 98 lukua, joista 25 on alkulukuja (katso alkulukutaulukkoa pelisääntöjen liitteestä 2). Silloin
$P(\text{alkuluku}) = \frac{25}{98} = 0{,}25510... \approx 0{,}26 = 26\%$.

Esim3 Pelin kolmioasemalla törmäämme *kolmiovaatimukseen.* Heitämme yhtä aikaa kolmea tavallista noppaa ja kahden pienimmän silmäluvun summan täytyy olla suurempi kuin suurin silmäluku. Millä todennäköisyydellä kolmiovaatimus täyttyy yhden heittokierroksen aikana?

Ratkaisu: Meidän täytyy merkitä nopat, esim. A, B ja C. Helpointa on olettaa, että nopat ovat erivärisiä. Yksinkertainen *kombinaatio-oppi* näyttää, että mahdollisia tuloksia on $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$. Esimerkiksi seuraavat kaksi mahdollisuutta eivät ole sama tulos:

A	6
B	1
C	1

A	1
B	6
C	1

Kokoamalla kaikki mahdolliset tulokset laskuohjelman taulukkoon huomaamme, että suotuisia tuloksia on 111 (tarkista tämä ☺). Silloin

$\text{P(kolmiovaatimus täyttyy)} = \dfrac{111}{216} \approx 0{,}514$.

Vaatimus täyttyy <u>yhden</u> heittokerran aikana siis todennäköisyydellä, joka on hieman suurempi kuin 50 %.

*Esim*4 Kolmioasemalla voimme myös saada 100 euron bonusvoiton. Toinen mahdollisuus on, että kaikki kolme noppaa näyttävät samaa lukua, jolloin tuloksena on tasasivuinen kolmio. Toinen mahdollisuus on, että noppien silmäluvut ovat 3, 4 ja 5. Silloin saamme suorakulmaisen kolmion[┘]. Kuinka suuri on bonusvoiton todennäköisyys?

Ratkaisu: Voimme saada kuusi erilaista tasasivuista kolmiota ja on myös kuusi tapaa saada suorakulmaisia kolmioita. Meillä on siis 12 erilaista suotuista tulosta bonusvoiton saamiseksi. Silloin

$\text{P(bonusvoitto)} = \dfrac{12}{216} = \dfrac{1}{18} \approx 0{,}056 = 5{,}6\,\%$.

Kun laskemme tiettyjä todennäköisyyksiä, tarvitsemme *kertolaskusäännön*. On helpompaa, jos tapahtumat A ja B ovat toisistaan <u>riippumattomia.</u> Näin on esim. heitettäessä kahta noppaa yhtä aikaa. Käytämme kaavaa

$$\text{P(A ja B)} = \text{P(A)} \cdot \text{P(B)}$$

*Esim*5 Heitämme yhtä aikaa mustaa ja valkoista noppaa. Kuinka suurella todennäköisyydellä molemmat nopat antavat tulokseksi kuusi?

Ratkaisu: Tässä $\text{P(valkoinen noppa antaa tuloksen kuusi)} = \dfrac{1}{6}$ ja $\text{P(musta noppa antaa tuloksen kuusi)} = \dfrac{1}{6}$. Silloin

$\text{P(molemmat nopat antavat tuloksen kuusi)} = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{36}$. Tämä vastaa yhtä rastia noppalehtiöön.

Tarvitsemme nyt säännön, joka osittaa A:n vastakohtaisen tapahtuman: $\text{P(ei A)} = 1 - \text{P(A)}$, tai prosentteina: P(ei A) % = $100\,\% - \text{P(A)}\,\%$. Todennäköisyysopissa kutsumme tätä A:n komplementtitapaukseksi.

[┘] Pythagoraan lause täyttyy kun $3^2 + 4^2 = 5^2$ eli $25 = 25$. Kolmio on siis suorakulmainen.

Esim6 Miniasemalla *nopanheittoa Clermont-Ferrandissa* meidän tulee valita kahden vaihtoehdon välillä ja heittää noppaa neljä kertaa peräkkäin (de Mérén ensimmäinen ongelma).

a) Laskemme strategian ”ei yhtään kuutosta” todennäköisyyden.

Ratkaisu: $\text{P(ei yhtään kuutosta)} = \frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6} = \frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296} \approx 0{,}48$

b) Strategia ”ainakin yksi kuutonen” on ”ei yhtään kuutosta”-tapahtuman vastakohta. Käytämme uutta sääntöä ja saamme:

Ratkaisu: $\text{P(ainakin yksi kuutonen)} = 1 - \text{P(ei yhtään kuutosta)} = 1 - \frac{625}{1296} = \frac{671}{1296} \approx 0{,}52$.

Jälkimmäinen tapahtuma on siis todennäköisempi.

*Esim*7 a) Laskemme todennäköisyyden tapahtumalle, että kolmiovaatimus ei täyty kolmen ensimmäisen heittokierroksen aikana saavuttuamme Pythagorioniin.
b) Laskemme todennäköisyyden tapahtumalle, että kolmiovaatimus täyttyy vasta neljännen heittokierroksen aikana.

Ratkaisu:

a) $\text{P(kolmiovaatimus ei täyty)} = 1 - \frac{111}{216} = \frac{105}{216}$

P(kolmiovaatimus ei täyty kolmen heittokierroksen aikana) =
$\frac{105}{216}\cdot\frac{105}{216}\cdot\frac{105}{216} = 0{,}11487\ldots \approx 0{,}11$

b) $\text{P(vaatimus täyttyy 4. kierroksen aikana)} = \left(\frac{105}{216}\right)^3 \cdot \frac{111}{216} = 0{,}05903\ldots \approx 0{,}059$.

Jos haluat, voit nyt helposti laskea todennäköisyyden tapahtumalle, että kolmiovaatimus täyttyy tietyn heittokierroksen aikana.

Syventävää

Meidän täytyy joskus laskea toisistaan riipuvaisten tapahtumien todennäköisyys. Kertolaskusääntö on silloin seuraavanlainen: $\text{P(A ja B)} = \text{P(A)}\cdot\text{P(B|A)}$. Tässä P(B|A) on ”B:n todennäköisyys kun A on tapahtunut”. Voit lukea enemmän toisistaan riippuvaisista tapahtumista lukion todennäköisyysopin kirjasta. Voimme laskea monen Kolmen kortin tulli–aseman strategian todennäköisyyden tämän säännön avulla.

*Esim*8 Laskemme todennäköisyyden sille, että strategia nro 8 ”Saat kolme mustaa korttia tai kolme punaista korttia” toteutuu yhden heittokierroksen aikana.

Ratkaisu: Saat kortinjakajalta kolme korttia peräkkäin. Kortit nostetaan palauttamatta niitä pakkaan. Pakassa on 26 mustaa ja 26 punaista korttia. Saamme

$\text{P(kolme mustaa korttia)} = \frac{26}{52}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{24}{50} = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{51}\cdot\frac{12}{25} = \frac{6}{51}$

Samalla tavoin saamme P(kolme punaista korttia) $= \frac{6}{51}$. Käytämme tässä *yhteenlasku-sääntöä* (toisiaan poissulkeviin tapahtumiin):

P(kolme mustaa korttia *tai* kolme punaista korttia) $= \frac{6}{51} + \frac{6}{51} = \frac{12}{51} = 0{,}23529... \approx 0{,}24$

Kuinka suuri tämä todennäköisyys on verrattuna muihin strategioihin?

Lotossa mahdollisuudet valita 7 numeroa 39 numeron joukosta voidaan merkitä $\binom{39}{7}$, mikä luetaan "39 yli 7". Tämä merkitään monissa taskulaskimissa $\boxed{\text{n C r}}$. Esimerkiksi

$$\binom{39}{7} = 15\,380\,937 .$$

Yleisesti voimme valita *n* henkilön ryhmästä *k* ihmistä $\binom{n}{k}$ eri tavalla.

*Esim*9 Laskemme todennäköisyyden sille, että saat kolmen kortin tullissa

a) kaksi punaista ja yhden mustan kortin (strategia nro 1)
b) tasan yhden kuvakortin (strategia nro 4)

yhden heittokierroksen aikana.

Ratkaisu:

a) Voimme nostaa kaksi punaista korttia $\binom{26}{2} = 325$ eri tavalla ja mustan kortin $\binom{26}{1} = 26$ tavalla. *Kombinaatio-opin kertolaskusääntö* sanoo, että voimme nostaa kaksi punaista ja yhden mustan kortin $26 \cdot 325 = 8450$ eri tavalla. Yhteensä voimme nostaa kolme korttia pakasta $\binom{52}{3} = 22100$ eri tavalla. Saamme

P(kaksi punaista ja yksi musta kortti) $= \frac{8450}{22100} = 0{,}3823... \approx 0{,}38$

b) Korttipakassa on yhteensä 12 kuvakorttia (kuningas, kuningatar, sotilas). Muita kortteja on 40. Haluamme nostaa yhden kuvakortin ja kaksi muuta korttia. Yllä olevan mukaan todennäköisyys on

$$\text{P(tasan yksi kuvakortti)} = \frac{\binom{12}{1}\binom{40}{2}}{\binom{52}{3}} = \frac{12 \cdot 780}{22100} = 0{,}4235... \approx 0{,}42 .$$

Selvittääksemme eri kombinaatiomahdollisuuksien määrän meidän täytyy käyttää *n*! ("*n:n kertoma*"). Meillä on esimerkiksi $7! = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$. Tämäntyyppisiä laskelmia tehdään kombinaatio-opissa paljon. Kombinaatioiden määrä on

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Voit lukea kombinaatio-opista enemmän lukion todennäköisyysopin oppikirjasta☺.